Gyakorló feladatok

Mi a következő sorok összege?

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$ $\left(= \frac{5}{4} \text{ végtelen mértani sor}, q = \frac{-1}{4}\right)$

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(= \frac{1}{12} \text{ végtelen mértani sor az első két tagja nélkül}, q = \frac{1}{4},\ \frac{4}{3} - 1 - \frac{1}{4}\right)$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$ $\left(= 5 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 5 \cdot 2 + \frac{3}{2}\right)$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n}$ $\left(= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 2 \cdot \frac{5}{3}\right)$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n}\right)$ $\left(= 2 + \frac{5}{6}\right)$

A részletösszegek egyszerűsítésével határozza meg a sorok összegét!

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$ $(= 1)$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$ $(= 3)$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ $(= 5)$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ $(= 1)$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ $(= 1)$

Melyik sor konvergens, melyik divergens? Indokoljon!

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ (Konvergens, végtelen mértani sor $|q| < 1$)

12. $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^n$ (Nem konvergens, végtelen mértani sor $|q| > 1$)

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$ $\left(\text{Konvergens, a hányadoskritérium alapján } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)}{(2n+2)(2n+3)}\right)$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n!3^n}$ $\left(\text{Konvergens, a hányadoskritérium alapján } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+4)}{3(n+1)}\right)$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ $\left(\text{Konvergens, a hányadoskritérium alapján } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n}\right.$
$\left. = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \longrightarrow e^{-1}\right)$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ $\left(\text{Nem konvergens, a hányadoskritérium alapján } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}\right)$

Adja meg a következő függvények Taylor-sorát az $x = 0$ helyen!

17. $f(x) = xe^x \quad \left(= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}\right)$

18. $f(x) = x^2 \sin x \quad \left(= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+3}}{(2n+1)!}\right)$

19. $f(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x \quad \left(= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}\right)$

20. $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3!} \quad \left(= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$

21. $f(x) = \frac{x^2}{1-2x} \quad \left(= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^{n+2}\right)$

22. $f(x) = x \ln(1+2x) \quad \left(= x\frac{1}{2} \int \frac{1}{1-(-2x)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{n+2}\right)$

23. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \left(= \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n\right)$

24. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3} \quad \left(= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n\right)$

25. $f(x) = 5 \sin(-x) \quad \left(= 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$