1. zh gyakorló feladatok

Mi a következő sorok összege?

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$

2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n}$

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n}\right)$

6. Határozzuk meg az $f(x) = x^4 - x^2 + 5$ függvény $x_0 = 0$ közepű Taylor-sorát.

7. Határozzuk meg az $f(x) = \sin(2x)$ függvény $x_0 = 0$ közepű Taylor-sorát. Mi a kapcsolat a $\sin x$ függvény 0-közepű Taylor-sorával?

8. Számoljuk ki a következő mátrixok determinánsát.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 11 & 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Mely mátrixkifejezések léteznek az alábbiak közül, és mennyi az értékük?
a.) $\mathbf{C}^2$ b.) $\mathbf{AB}$ c.) $\mathbf{AB}^T$ d.) $\mathbf{CD}$ e.) $\mathbf{BC}$

10. Mennyi a következő mátrixok rangja?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

11. Számítsuk ki a 8-as feladatban szereplő mátrixok inverzeit, majd ellenőrizzük is számításainkat.

12. A feladat megoldása előtt igazoljuk, hogy egyértelműen létezik a feladatnak megoldása, majd oldjuk is meg Gauss-eliminációval.

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 1 \\ 2x + 6y + 8z &= 3 \\ 6x + 8y + 18z &= 15 \end{aligned}\right\}$$

13. Oldjuk meg Gauss-eliminációval a következő feladatot. Ellenőrizzük is az eredményt.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= -7 \\ 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 &= -4 \end{aligned}\right\}$$

14. Oldjuk meg Gauss-eliminációval a következő feladatot. Ellenőrizzük is az eredményt.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 11x_2 + 5x_3 &= 9 \\ 4x_1 + 18x_2 + 3x_3 &= 11 \end{aligned}\right\}$$

15. Oldjuk meg Gauss-eliminációval a következő feladatot. Ellenőrizzük is az eredményt.

$$\left.\begin{aligned} 2x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 9x_2 + 3x_3 &= 7 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 6 \end{aligned}\right\}$$

16. Számítsuk ki az alábbi függvények x és y szerinti parciális deriváltjait.

a.) $f(x,y) = xy$ b.) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ c.) $f(x,y) = 2xy - \mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}y$

d.) $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\sin y}$ e.) $f(x,y) = 2^x + 10^y$ f.) $f(x,y) = x^2 - y^2 + \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) + \mathrm{tg}x$

g.) $f(x,y) = x \cdot e^{x+y}$ h.) $f(x,y) = x^y$ i.) $f(x,y) = \ln(y + e^x)$

17. Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat. Minden esetben adjunk példát a sajátvektorokra.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

18. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények lokális szélsőértékhelyeit és nyeregpontjait! Lokális szélsőérték létezése esetén állapítsuk meg a szélsőérték jellegét.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 10x^2 + 14xy + 5y^2 + 2x + 2y + 2020 \\ g(x,y) &= x^2 + xy + y^2 + x + y + 1 \\ h(x,y) &= (x + 2y - 1)(2x - y + 1) \\ i(x,y) &= x^2 - y^2 \\ j(x,y) &= e^x + e^y \end{aligned}$$