

5. hét: Gyökök, hatványok, logaritmus és exponenciális függvény

Bevezetés

I. Egy televíziós vetélkedőn a nyereményre a következő szabályok vonatkoznak. Minden, a képernyőre kerülő versenyző kap 10 000 Ft jutalmat. A versenyre párokat sorsolnak ki, a párok két tagja egymás ellen játszik. A nyertes, minden megnyert forduló után, megkapja a kezdő összeg, illetve az előző nyeremény 1,8-szeresét, és továbbléphet a következő fordulóba. (A vesztes kiesik a játékból.) Az egyik játékos már az ötödik fordulót nyerte meg.

- Mennyi a nyereménye ebben a fordulóban?

- Legalább hány fordulót kell megnyernie annak, aki 1 000 000 Ft-ot szeretne nyerni egyetlen fordulóban?

II. Számítsuk ki fejben!

a) $\frac{2^{15} \cdot 2^{21}}{8^{11}}$ b) $\frac{3^{10}}{9^5 + 9^6}$ c) $\frac{2^{16} \cdot 3^{16}}{6^{15}}$ d) $\sqrt[3]{4^{60}}$

e) 9^{-2} f) $8^{\frac{2}{3}}$ g) $1024^{-0,3}$ h) $81^{0,75}$

i) $\log_2 0,25$ j) $\log_3 81$ k) $\log_{81} 3$

III. Tudjuk, hogy $2^x=5$. Mivel egyenlő a) 2^{x+1} , b) 4^x , c) $10^{x \lg 2}$?

Az exponenciális és a logaritmusfüggvények ábrázolása

IV. Ábrázolja a következő exponenciális függvényeket!

a) $y = 2^x$

b) $y = 1^x$

c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Fogalmazza meg az exponenciális függvény alapja és a függvény monotonitása közötti összefüggést!

d) $y = 2 \cdot 3^x$

e) $y = 3^{2x}$

f) $y = 2 \cdot 3^{-x}$

g) $y = 3^{-2x}$

h) $y = -2 \left(\frac{1}{10}\right)^{-2x} - 2$

i) $y = 2e^x$

j) $y = 2e^{-x} + 4$

k) $y = -\frac{2}{3}e^{-x} - 1$

V. Ábrázolja következő logaritmusfüggvényeket!

a) $y = \log_2 x$

b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Milyen kapcsolatot lát az I./a,c feladattal?

c) $y = \ln x$

d) $y = 3 \cdot \lg x + 3$

e) $y = -\ln(x + 2)$

f) $y = -\log_{\frac{1}{3}} x + 2$

g) $y = 1,5 \cdot \log_3 x - \frac{1}{2}$

VI. Oldja meg a következő szöveges feladatokat!

a.) Egy radioaktívan bomló anyag felezési ideje 1 nap. Mennyi anyag marad

- 2 nap elteltével? - 29 óra elteltével?

- Hány óra elteltével bomlik le az anyag 90%-a?

b.) Egy baktériumtelep tömege 2 óránként megduplázódik.

- Az eredeti tömeg hányszorosára nő a telep tömege 6 óra alatt?

- Az eredeti tömeg hányszorosára nő a telep tömege 1 óra alatt?

- Hány nap elteltével 10-szereződik meg a telep tömege?

Egyenletek, egyenlőtlenségek

VII. Oldja meg a következő feladatokat!

a) $6^{4x+3} = 36$

e) $2^{x^2-3x+4} < 4$

b) $2^{-3x} = \frac{1}{4}$

f) $\log_2 \log_3 x = 1$

c) $7^{x^2+9x+14} = 1$

g) $\log_2(x^2 + 4x + 8) = 2$

d) $\frac{1}{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^x$

VIII. Számolja ki a következő kifejezések értékét számológép használata nélkül!

a) $\log_5 1, \log_{\frac{1}{7}} 49, \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}, \lg \sqrt{100}$

b) $3^{2 \cdot \log_3 5}, 49^{\log_7 11}, \left(\frac{1}{4}\right)^{-1 \cdot \log_2 6}, 5^{\log_5 -5}$

IX. Adja meg a következő függvények legtágabb értelmezési tartományát!

a) $y = \log_2(2x - 7)$

c) $y = \log_{\frac{1}{2}} |2x - 4|$

b) $y = \log_5(5 - x)$

X. Ábrázolja és jellemezze az alábbi függvényeket!

a) $f(x) = \log_2(x + 3)$

b) $g(x) = \log_2(x - 1) - 2, \text{ ha } x \in [-1, 9]$

XI. Melyik a nagyobb?

a) $\log_3 13$ vagy $\log_3 16$

c) $\log_2 3$ vagy $\log_3 2$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ vagy $\log_{\frac{1}{2}} 4$

XII. Oldja meg grafikusán a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

a) $\log_4 x = x^2 + 1$

b) $\log_7(2x + 1) < \log_7(x + 3)$

c) $\log_{\frac{1}{4}} x < -\sqrt[3]{x} + 2$