Matematika 2. gyakorlat
Műszaki menedzser szak

1. gyakorlat

A $\sum a_n$ sor konvergens, ha az $S_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ tagokból álló (S_k), ún. részletösszeg-sorozat konvergens. Ebben az esetben ezt a határértéket a sor összegének nevezzük.

1. Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 1 \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2. Mutassuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek. Mi a sorok összege?

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad (|q| < 1) \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

Ha (a_n) egy adott számsorozat és $x_0 \in \mathbb{R}$ egy rögzített szám, akkor az

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

függvénysort hatványsornak nevezzük. Azon x pontok halmazát, ahol a fenti sor konvergens, a hatványsor konvergenciahalmazának hívjuk. Például $x = x_0$ esetén a fenti sor biztosan konvergál (hiszen az összegben az elsõ kivételével minden tag nulla). Egy hatványsor konvergenciahalmaza mindig egy x_0 középpontú, R sugarú intervallum. Ha létezik a $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ határérték, akkor ez a sugár az

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

képlettel számolható. Ha a fenti limesz nem létezik, akkor is érvényes R-re egy hasonló képlet.

Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy végtelen sokszor differenciálható függvény, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

hatványsort az f függvény x_0 ponthoz tartozó Taylor-sorának nevezzük. Ha a Taylor-sor középpontja az $x_0 = 0$ pont, akkor a Taylor-sort MacLaurin-sornak nevezzük.

3. Határozzuk meg a következő függvények MacLaurin sorát. Vizsgáljuk a konvergenciahalmazt.
   (a) $c(x) = x + 1$
   (b) $d(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 1$
   (c) $f(x) = e^x$
   (d) $g(x) = \sin x$
   (e) $h(x) = \cos x$
   (f) $j(x) = \frac{1}{1-x}$

4. A nevezetes Taylor-sorok felhasználásával határozzuk meg az alábbi függvények 0 közepű Taylor-sorát! Vizsgáljuk a konvergenciahalmazt.

$$\text{(a)} \quad \sin x^2 \qquad \text{(b)} \quad \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{(c)} \quad e^{-x} \qquad \text{(d)} \quad xe^{-x} \qquad \text{(e)} \quad \frac{x^2}{1+x^2}$$

5. Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény $x_0 = 0,\ 1$ valamint 2 középpontú Taylor-sorát.

2. gyakorlat

Sík- és térvektorok. Vektorok hossza, hajlásszöge, skaláris szorzata. Műveletek vektorokkal.

6. (a) $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ és $\mathbf{v} = (0, -4, 2)$ esetén adja meg az $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ és $5\mathbf{u}$ vektorokat!
   (b) Mekkora az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ vektor hossza?
   (c) Mekkora az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ vektor skaláris szorzata?
7. (a) Legyen $\mathbf{u} = (2, -3, 0)$ és $\mathbf{v} = (-1, 2, 4)$ esetén adja meg az $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ és $3\mathbf{u}$ vektorokat!
   (b) Mekkora az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ vektor hossza?
   (c) Mekkora az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ vektor skaláris szorzata?
8. Hogyan válasszuk meg a p paraméter értékét, hogy az $\mathbf{a} = (0, -2, 1)$ és $\mathbf{b} = (1, 2, p)$ vektorok merőlegesek legyenek?
   Lineárisan független vektorok
9. Legyen $\mathbf{a} = (5, -3)$, $\mathbf{b} = (1, 2)$. Igazoljuk hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok függetlenek.
10. Legyenek $\mathbf{a} = (3, -2)$, $\mathbf{b} = (x, 7)$ és $\mathbf{c} = (8, y)$. Határozzuk meg x és y értékét úgy, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, majd $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineárisan összefüggőek legyenek. Mit mondhatunk ekkor $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$-re?
11. Bontsuk fel a $\mathbf{v} = (1, -5)$ vektort az $\mathbf{a} = (2, -1)$ és $\mathbf{b} = (1, 1)$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre.
12. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok lineárisan függetlenek. Legyenek
   (a) $\mathbf{m} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{n} = 2\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{a}$, $\mathbf{p} = 2\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$
   (b) $\mathbf{m} = \mathbf{c}$, $\mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{p} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$
   (c) $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{n} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{p} = -\mathbf{a} + \mathbf{c}$

   Döntsük el, hogy az $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{p}$ vektorok lineárisan függetlenek-e.

   Mátrix fogalma, mérete. Műveletek mátrixokkal: összeadás, kivonás, szorzás, transzponálás.
13. Legyenek adva a következő mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

   Mely mátrixkifejezések léteznek az alábbiak közül, és mennyi az értékük?
   a.) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}$ b.) $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}$ c.) $\mathbf{B}^2 - 2\mathbf{B}$ d.) $\mathbf{C} + \mathbf{D}^T$ e.) $\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{C}^T$ f.) $\mathbf{B}\mathbf{B}^T + \mathbf{C}$
14. Végezzük el a következő szorzásokat.

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = ?$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = ?$

   Négyzetes mátrixok determinánsa Minden négyzetes mátrixhoz tartozik egy meghatározó valós szám, neve *determináns.* Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix determinánsának jele $\det \mathbf{A}$ vagy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

   Először a 2×2-es és a 3×3-as mátrixok determinánsát definiáljuk, a nagyobbakat azután rekurzív módon.

   Definíció.

$$2\times2\text{-es:} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

$$3\times3\text{-as:}\qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

E két szabály könnyen megjegyezhető:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

A főátló (folyamatos vonallal jelölve) két elemének szorzatából kivonjuk a mellékátló (pontozott vonallal jelölve) két elemének szorzatát.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right| = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

Először a mátrix első két oszlopát a determináns mögé másoljuk. Utána a főátló elemeit összeszorozzuk, majd hozzáadjuk a vele párhuzamosan elhelyezkedő két számhármas szorzatát (folyamatos vonalak), ebből kivonjuk a mellékátlóbeli elemek szorzatát és a vele párhuzamos két számhármas szorzatát (pontozott vonalak). Az eljárás neve *Sarrus-szabály.*

(A 2×2-es és a 3×3-as determináns definíciójában is a tagok olyan szorzatok, melyekben minden sorból egy tényező szerepel és minden oszlopból is. Pl. a 3×3-as determináns utolsó tagja bdi, melyben b az első sor, d a második sor, i a harmadik sor eleme, míg az oszlopokat tekintve b a másodikhoz, d az elsőhöz és i a harmadikhoz tartozik. $3! = 6$ ilyen szorzat van.)

15. Definíció. Egy determinánsban valamely elem *aldeterminánsá*nak nevezzük az adott elem sorának és oszlopának elhagyásával keletkező kisebb determinánst.

    Az $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix i-edik sora j-edik eleméhez (a_{ij}) tartozó aldeterminánst A_{ij}-vel jelöljük. Az $n\times n$-es mátrix aldeterminánsainak mérete $(n-1)\times(n-1)$.

A nagyobb méretű determinánsok definícióját megadhatjuk eggyel kisebb méretű (al)determinánsok segítségével (az eljárás neve determináns *kifejtés*e aldeterminánsokkal).

Definíció. Egy determináns rekurzív módon aldeterminánsokkal úgy kapható meg, hogy tetszőlegesen választott sorban vagy oszlopban minden elemet megszorzunk a hozzá tartozó aldeterminánssal, majd a kapott szorzatokat a „*sakktáblaszabály*”

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

szerinti előjelnek megfelelően összeadjuk, ill. kivonjuk.

16. Számoljuk ki az alábbi determináns értékét az első sor szerinti kifejtéssel, a második oszlop szerinti kifejtéssel és Sarrus-szabállyal is.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

17. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = ?$

18. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = ?$

19. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = ?$

3. gyakorlat

Négyzetes mátrixok inverze

20. Számítsuk ki az

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

mátrixok inverzeit. Milyen problémába ütközünk a $\mathbf{C}$ mátrix invertálása során?

Mátrixok rangja: Az $\mathbf{A}$ nemnulla mátrix rangján az egymással lineárisan független rendszert alkotó sorvektorainak (vagy oszlopvektorainak) maximális számát értjük. (Belátható, hogy ez a két szám megegyezik.) Ha $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ (nullmátrix), akkor a rangja 0. A rang jelölése: $\varrho(\mathbf{A})$.

21. Számítsuk ki a következő mátrixok rangját.

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & - \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

22. Írjuk fel a következő feladatok esetében az együttható mátrixot, valamint a kibővített együttható mátrixot, állapítsuk meg mindkettő rangját és döntsük el, lesz-e a feladatnak megoldása. Ha igen, határozzuk meg a megoldások számát is. Ahol tudjuk, oldjuk meg az egyenletrendszert $\mathbf{A}^{-1}$ kiszámolásával, ahol erre nincs módunk, oldjuk meg középiskolai módszerekkel a feladatot.

(a) $\begin{cases} 3x - y &= 5 \\ 2x + y &= 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 4x - 7y &= 5 \\ x + 5y &= 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - 4y &= 1 \\ 3x + 2y &= 20 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x + y &= 10 \\ 6x + 2y &= 20 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 3x + y &= 10 \\ 6x + 2y &= 21 \end{cases}$

A Gauss-elimináció alkalmazása lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldására.

23. Oldjuk meg a következő feladatokat.

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 12 \end{cases}$

(b) $$\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 9x_3 &= -32 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 12 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -7 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= -8 \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 19 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 &= -9 \\ -2x_1 + 3x_2 2x_3 + x_4 &= -2 \end{cases}$$

(e) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 &= -23 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 14 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 &= 23 \\ -3x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 - x_5 &= 0 \end{cases}$$

(f) $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 &= 22 \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 &= 24 \end{cases}$$

(g) $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 - x_5 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 6x_5 &= 5 \\ 4x_1 + x_2 - 8x_3 + x_4 + x_5 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1 \\ -5x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 &= 1 \end{cases}$$

4. gyakorlat

24. Az A $n\times n$-es négyzetes mátrix és a v n-dimenziós vektor Av szorzata is n-dimenziós vektor. A nullvektortól különböző v vektor pontosan akkor párhuzamos az Av vektorral, amikor a második az elsőnek számszorosa, azaz van olyan λ valós szám, melyre $Av = \lambda v$. Az ilyen pozitív hosszúságú vektort, amelyik párhuzamos a mátrixszorosával, a mátrix sajátvektorának fogjuk hívni.

    DEFINÍCIÓ. Az $n\times n$-es A mátrixnak a λ valós szám *sajátértéke* és az n dimenziós v vektor egy hozzátartozó *sajátvektora*, ha $Av = \lambda v$ és v nem a nullvektor.

    $$Av = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad Av = \lambda I v \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)v = \mathbf{0},$$

    ahol $\mathbf{0}$ az n dimenziós nullvektor (minden koordinátája nulla).

    A sajátértékeket egyenlet megoldásával kaphatjuk meg.

    ÁLLÍTÁS. *λ pontosan akkor sajátértéke az A négyzetes mátrixnak, ha* $\det(A - \lambda I) = 0$.

    Az $A - \lambda I$ mátrix A-ból úgy kapható, hogy a főátló elemeiből kivonunk λ-t.

    DEFINÍCIÓ. Ha A $n\times n$-es mátrix, akkor $\det(A - \lambda I) = 0$ n-edfokú algebrai egyenlet, amit A *karakterisztikus egyenlet*ének hívunk. A $\det(A - \lambda I)$ polinom neve *karakterisztikus polinom*.

    Minden n-edfokú algebrai egyenletnek legfeljebb n gyöke van, ezért minden $n\times n$-es mátrix sajátértékeinek száma legfeljebb n.

25. Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat. Minden esetben adjunk példát a sajátvektorokra.

    (a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

    (b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

    (c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

    (d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

    (e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

26. Számítsuk ki az alábbi függvények x és y szerinti parciális deriváltjait!

    (a) $f(x,y) := x^2 + 3y^3 - 2x + 5y - 6$, (b) $f(x,y) := x^2 - 5xy + 3y^3 - 6x + 7y + 8$,

    (c) $f(x,y) := \mathrm{tg}(3x - 5y)$, (d) $f(x,y) := \dfrac{xy}{x+y}$, (e) $f(x,y) := \sin\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$,

    (f) $f(x,y) := \sin(x^2 + y^2)$, (g) $f(x,y) := e^{x-3y}$, (h) $f(x,y) := x\cos y + ye^x$,

    (i) $f(x,y,z) := 1 - 2xy^2z + x^2y$, (j) $f(x,y) := \cos^2(3x + y^2)$

A $z = f(x, y)$ felület és a függőleges z-tengelyre merőleges $z = z_0$ vízszintes sík metszetét az (x, y) síkon ábrázolva szintvonalnak nevezzük. A szintvonalak az (x, y) síkon mindig az értelmezési tartományon belül, vagy a határán haladnak.

27. Határozzuk meg és ábrázoljuk a kétváltozós függvény értelmezési tartományát és a $z_0 = -2,\ 0,\ 2$ magasságokhoz tartozó szintvonalakat.

    (a) $z = \sqrt{xy}$

    (b) $z = e^{x+y}$

    (c) $z = \lg\left(\frac{x}{y}\right)$

    (d) $z = \sqrt[3]{y - x^3}$

28. Határozzuk meg az $f(x, y, z) = (e^{xy}, \cos(y + z), \ln(z + 5))$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvény Jacobi mátrixát.

29. A következő feladatokban adjuk meg meg az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény Jacobi mátrixát.

    (a) $f(x, y) = xe^y$

    (b) $f(x, y) = e^x \cos y$

    (c) $f(x, y) = y \sin x$

    (d) $f(x, y) = \sin x \cos y$

    (e) $f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$

    (f) $f(x, y) = \ln(2x + y + 1)$

5. gyakorlat

30. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények lokális szélsőértékhelyeit és nyeregpontjait! Lokális szélsőérték létezése esetén állapítsuk meg a szélsőérték jellegét!

(a) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$	((1, 2) lok. max)
(b) $f(x,y) = 2xy - 4x^2 - y^2 + x^3$	((2, 2) nyereg (0, 0) lok. max)
(c) $f(x,y) = y^3 + 9y^2 + 12xy + 3x^2 + 27$	((0, 0) nyereg (−4, 2) lok. min.)
(d) $f(x,y) = 4x^2 - 24xy + y^3 + 10$	((0, 0) nyereg (72, 24) lok. min.)
(e) $f(x,y) = xy + \frac{3}{x} + \frac{9}{y}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$	((1, 3) lok. min.)
(f) $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{4y^2}{x^2} + \frac{y^2}{2} + y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$	((−2, −1) lok. min.)
(g) $f(x,y) = x^2y - x^2 - \ln y$, $y > 0$	((−1, 1) nyereg (1, 1) nyereg)
(h) $f(x,y) = (x + y^2)e^y$	(nincs)
(i) $f(x,y) = (x^2 + y)e^y$	((0, −1) lok. min.)

6. gyakorlat

Kétváltozós $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény integráljának kiszámításához az alábbi lebontási tételt használhatjuk, amennyiben egy téglalapon ($n = 2$) integrálunk:

1. Tétel (Fubini). *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és $D = [a, b] \times [c, d]$. Ekkor*

$$\int_D f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\ dy \right)\ dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\ dx \right)\ dy$$

Hasonló állítás fogalmazható meg az $n = 3$ esetre is. Gyakran olyan síkidomon kell integrálni, amelyet alulról és felülrõl folytonos függvények grafikonjai határolnak. Ha $\varphi,\ \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, akkor az

$$N_x = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [a, b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\right\}$$

halmazt (az x-tengelyre nézve) normáltartománynak nevezzük. Ekkor

$$\int_{N_x} f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x$$

Hasonló állítás fogalmazható meg olyan N_y tartományra, amely az y-tengelyre nézve normáltartomány.

31. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat!
    (a) $\displaystyle\int_D \frac{x^2}{1 + y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, ahol $D = [1, 2] \times [0, 1]$;
    (b) $\displaystyle\int_D \sin y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, ahol $D = [0, 1] \times [-1, 1]$;
    (c) $\displaystyle\int_D (\sqrt{x} + y)^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, ahol $D = [0, 1] \times [0, 1]$;
    (d) $\displaystyle\int_D \cos x \cos y \cos z\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$, ahol $D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$;
    (e) $\displaystyle\int_D \cos(x + z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$, ahol $D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.
32. Számítsuk ki $\int_{N_x} f$ értékét, ha
    (a) $f(x, y) = 1,\quad N_x := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [0, 1],\ 0 \le y \le 1 - x^2\right\}$;
    (b) $f(x, y) = xy^2,\quad N_x := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\right\}$;
    (c) $f(x, y) = \sqrt{y},\quad N_x := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [-1, 1],\ 0 \le y \le (1 - x)^2\right\}$.
33. Számítsuk ki az $f(x, y) = xy$ függvény integrálját az $y = x^2 - 1$ és az $y = x + 1$ görbék grafikonjai által határolt tartományon.

7. gyakorlat

34. Példa. Egy urnában egy piros golyó (P), egy fehér golyó (F) és egy zöld golyó (Z) van. Egymás után kihúzzuk a három golyót, semelyik kivett golyót nem tesszük vissza később az urnába. Hányféle sorrendben tehetjük ezt meg?

Definíció. n különböző elem egy *permutáció*ja (más néven ismétlés nélküli permutációja) az n elem egy sorrendje, sorbarendezése.

(A különböző elemekre gondolhatunk úgy, mint különböző színű golyókra egy urnában, melyeket egymás után, visszatevés nélkül húzunk ki. Minden lehetséges színsorrend egy permutációt jelent.)

Állítás. *n különböző elem permutációinak száma $n!$.*

35. Példa. Egy urnában két piros golyó (P) és egy fehér golyó (F) van. Egymás után kihúzzuk a három golyót, semelyik kivett golyót nem tesszük vissza később az urnába. Hányféle színsorrendben tehetjük ezt meg?

Definíció. n nem feltétlenül különböző elem egy *ismétléses permutáció*ja az n elem olyan sorrendje, ahol az egyforma elemeket nem különböztetjük meg egymástól.

(Színes golyókkal: Az urnában n darab golyó van, közöttük lehetnek azonos színűek is. Egymás után, visszatevés nélkül kihúzzuk a golyókat. Minden lehetséges színsorrend egy ismétléses permutációnak felel meg.)

Állítás. *n elem ismétléses permutációinak száma $\dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!}$, ha az elemek r-félék és az első típusúból k_1 darab, a második típusúból k_2 darab, $\ldots$, az r-edik típusúból pedig k_r darab van ($k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$).*

Példa. A P, P, F elemek összes ismétléses permutációja PPF, PFP és FPP, számuk valóban $\frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$.

36. Példa. Az 1, 2, 3, 4 számjegyekkel hányféle olyan kétjegyű számot írhatunk fel, melyekben minden számjegy legfeljebb egyszer szerepel?

Definíció. n különböző elem egy k-adosztályú *variáció*ja (más néven ismétlés nélküli variációja) az n elem közül kiválasztott valamely k számú elem egy sorrendje ($k \leq n$).

(Színes golyókkal: Az urnában n darab különböző színű golyó van, közülük egymás után kihúzunk k darabot. Minden lehetséges színsorrend egy k-adosztályú variációt jelent.)

Állítás. *n különböző elem k-adosztályú variációinak száma $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.*

Példa. Az 1, 2, 3, 4 elemek másodosztályú variációinak száma $\dfrac{4!}{(4-2)!} = 12$, ahogy azt az előző példában kiszámoltuk.

37. Példa. Az 1, 2, 3, 4 számjegyekkel hányféle kétjegyű számot írhatunk fel, ha a számjegyek ismétlődhetnek?

Definíció. n különböző elem egy k-adosztályú *ismétléses variáció*ja az n elem közül egymás után visszatevéses eljárással kiválasztott valamely k számú elem sorrendje.

Mivel a kiválasztott elemet visszatesszük a következő kiválasztás előtt, egy elemet többször is választhatunk.

(Színes golyókkal: Az urnában n darab különböző színű golyó van. Kihúzunk egy golyót, felírjuk a színét, majd visszatesszük az urnába a golyót. Az eljárást k-szor végrehajtjuk. Minden lehetséges színsorrend egy ismétléses variációt jelent.)

Állítás. *n elem összes k-adosztályú ismétléses variációinak száma n^k.*

38. PÉLDA. Hány kételemű halmazt képezhetünk az 1, 2, 3, 4 számokból? (Egy halmaz elemeinek sorrendje nem számít.)

    DEFINÍCIÓ. n különböző elem egy k-adosztályú *kombináció*ja (más néven ismétlés nélküli kombinációja) az n elem közül k számú elem egyszerre történő kiválasztása.

    (Színes golyókkal: Az urnában n darab különböző színű golyó van, közülük egyszerre kihúzunk k darabot. Minden lehetséges húzás egy kombinációnak felel meg.)

    ÁLLÍTÁS. *n különböző elem k-adosztályú kombinációinak száma* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

39. Hányféleképpen rakhatunk ki a magyar kártyából 8 piros és 8 zöld lapot, ha egymás után különböző színű lapokat kell elhelyeznünk?

40. Egy 12 tagú társaság kerek asztalnál foglal helyet. Hányféle sorrendben ülhetnek le, ha a helyek nem számozottak?

41. 12 különböző drágakőből hányféleképpen készíthetünk nyakláncot?

    Megoldás.

42. A 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen választhatunk ki 10 lapot úgy, hogy a 4 ász közöttük legyen?

43. Hányféleképpen helyezhetünk 5 különböző szórólapot 16 levelesládába úgy, hogy egy levelesládába (a) legfeljebb egy szórólapot teszünk, (b) több szórólapot is tehetünk?

44. Hányféleképpen helyezhetünk 5 egyforma szórólapot 16 levelesládába úgy, hogy egy levelesládába (a) legfeljebb egy szórólapot teszünk, (b) több szórólapot is tehetünk?

45. Egy gyermek 5 különböző fagylaltból választhat háromgombócos adagot. Hányféle lehetősége van a választásra, ha az adagolás sorrendjére nem vagyunk tekintettel, és (a) minden gombóc különböző, (b) több gombóc is állhat ugyanabból a fagylaltból?

46. Csak az 1, 2, 3, 4 számjegyekből legalább hány jegyből álló számokat kell felírnunk ahhoz, hogy legalább 1000 különböző számot kapjunk?

47. Hányféleképpen lehet 4 egyenlő részre osztani a 32 lapos magyar kártyát úgy, hogy a négy ász ugyanabba a részbe kerüljön?

48. Egy kisközségben 35 vezetékes telefon van. Hányféle helyi telefonbeszélgetés létesülhet?

49. Egy 7 fiúból és 5 lányból álló társaság tagjaiból hányféleképpen alakulhat 5 egyszerre táncoló pár?

50. 9 ember csónakázni indul. Három csónak áll rendelkezésükre, az egyik négy-, a másik három-, a harmadik kétszemélyes. Hányféleképpen indulhatnak el, ha csak az számít, ki kivel ül egy csónakba?

51. Egy vasúti szerelvény a mozdonyon kívül 9 kocsiból áll. Hányféle sorrendben kapcsolhatók a mozdony után a kocsik, ha köztük 5 személy-, 3 háló-, valamint 1 étkezőkocsi van, és az azonos fajtájúakat nem különböztetjük meg?

52. Egy pont egységnyi lépéseket tesz meg a számegyenesen, pozitív vagy negatív irányban. Hányféleképpen juthat el az origóból 15 lépesben a $+3$ pontba?

53. Egy rejtvénypályázaton 3 különböző díjat sorsolnak ki a 78 helyes megfejtő között. Hányféle eredményt hozhat a sorsolás, ha

    - a díjak különbözők és mindegyik helyes megfejtő legfeljebb egyet kaphat?
    - a díjak különbözők és egy díjazott több díjat is kaphat?
    - a díjak egyformák és mindegyik helyes megfejtő legfeljebb egyet kaphat?

54. Vívóedzésen 15 vívóból 6 pár vív egyidejűleg. Hányféleképpen választhatók ki a párok?

55. Mi a valószínűsége annak, hogy egy dobókockával egymás után háromszor dobva az összeg 17?

56. Egy urnában 10 piros és 10 zöld golyó van. Határozzuk meg az alábbi két esemény valószínűségét!

    - Visszatevéses eljárással (*visszatevéses mintavétel*) 5-ször húzva 3-szor kapunk pirosat.
    - Visszatevés nélkül (*visszatevés nélküli mintavétel*) 5-ször húzva 3-szor kapunk pirosat.

57. Most az urnában 100 piros és 100 zöld golyó van. Határozzuk meg az előző feladatbeli két esemény valószínűségét!

8. gyakorlat

58. Az X diszkrét valószínűségi változó értékei $0, 1, 4, 7$, ezekhez tartozó valószínűségek rendre $0,1$; $0,2$; $0,35$; p.
    (a) Határozzuk meg p értékét.
    (b) Ábrázoljuk az eloszlást oszlopdiagramon.
    (c) Ábrázoljuk az eloszlásfüggvényt, majd adjuk is meg képlet segítségével.
    (d) Számítsuk ki a várható értéket és a szórást.

59. Egy játék során jelölje a nyereményt X, ahol

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} X_i & -10 & 5 & 9 \\ \hline p_i & p & 0,2 & q \end{array}\right)$$

    Tudjuk továbbá, hogy kétszer akkora a vesztés (negatív nyeremény) esélye, mint a nyerésé.
    (a) Határozzuk meg p és q értékét.
    (b) Ábrázoljuk az eloszlást oszlopdiagramon.
    (c) Ábrázoljuk az eloszlásfüggvényt, majd adjuk is meg képlet segítségével.
    (d) Számítsuk ki a várható értéket és a szórást.

60. Ládákba gyűjtik az almákat szüret idején. Egy almáról külsőleg nem lehet megállapítani, hogy kukacos vagy sem, de a korábbi évek tapasztalatai alapján az almák 7%-a rendszerint kukacos. 7 darab almát kiveszünk és megvizsgálunk, jelölje X valószínűség változó a kukacos almák számát a mintában.
    (a) Mi a valószínűsége, hogy 4 alma kukacos?
    (b) Mi a valószínűsége, hogy több, mint a fele jó?
    (c) Mi a valószínűsége, hogy eggyel több a kukacos alma, mint az egészséges?
    (d) Mi a valószínűsége, hogy a mintának legfeljebb 25%-a kukacos?
    (e) $P(X < 3) = ?$
    (f) $P(1,1 < X) = ?$
    (g) $P(X = 1,5) = ?$

61. Feldobunk egy szabályos dobókockát, 1-es és 2-es esetén 100 Ft-ot nyerünk, 3-as és 4-es esetén 200 Ft-ot nyerünk, míg 5-ös és 6-os esetén 300 Ft-ot vesztünk. Jelölje X valószínűségi változó a nyereményt egy kockadobás után.
    (a) Határozzuk meg X értékeit és a megfelelő valószínűségeket.
    (b) Ábrázoljuk az eloszlást oszlopdiagramon.
    (c) Ábrázoljuk az eloszlásfüggvényt, majd adjuk is meg képlet segítségével.
    (d) Számítsuk ki a várható értéket és a szórást.
    (e) $F(120) = ?$
    (f) $F(-5) = ?$
    (g) $F(300) = ?$

62. Húsvétkor összekeveredtek a tavalyi és az idei csokitojásaink. Tudjuk, hogy tavalyról 12 db maradt meg, idén pedig 18-at vettünk. A házi süteményem díszítéséhez 6 csokitojást megolvasztok, jelölje X valószínűségi változó a tavalyi csokitojások számát a megolvasztott mintában.
    (a) Mi a valószínűsége, hogy 2 tavalyi csokitojást használtam fel?
    (b) Mi a valószínűsége, hogy több, mint a fele idei a tojásoknak?
    (c) Mi a valószínűsége, hogy mindegyik tojás tavalyi volt?

(d) Mi a valószínűsége, hogy a mintának legfeljebb 80%-a tavalyi?

(e) $P(X < 3) =?$

(f) $P(2,3 < X) =?$

(g) $P(X = 1,5) =?$

(h) $P(1,7 < X < 6,3) =?$

63. Mickey és Minnie játszanak. Mickey feldob 3 szabályos érmét, és ha csak fej vagy csak írás van az érméken, akkor kap 400 aranyat Minnietől, különben ő ad 100 aranyat Minnienek. Igazságos a játék? Ha nem, akkor kinek kedvez? Kinek kellene a játék jogáért fizetnie és mennyit, hogy igazságos legyen a játék?

9. gyakorlat

64. Feltételes valószínűség

    (a) PÉLDÁK a kockadobásnál.

    (b) Hogyan változik annak a valószínűsége, hogy 6-os a dobott szám, ha megtudjuk, hogy páros?

    (c) Hogyan változik annak a valószínűsége, hogy 6-os a dobott szám, ha azt tudjuk, hogy a dobott szám páratlan?

    (d) Hogyan változik annak a valószínűsége, hogy páros a dobott szám, ha megtudjuk, hogy az legfeljebb 4?

65. DEFINÍCIÓ. Az E esemény *feltételes valószínűség*e az F feltétel mellett $P(E|F) = \dfrac{P(EF)}{P(F)}$, ha $P(F) \neq 0$.

    PÉLDA. Számoljuk ki a definíció alapján annak a valószínűségét, hogy kockadobáskor 6-ost dobunk feltéve, hogy a dobott szám páros!

66. Az alábbi *kontingenciatáblázat* a tüdőrák és a dohányzás, mint rizikófaktor kapcsolatát leíró vizsgálat adatait tartalmazza. Tekintsük a feladatban szereplő események valószínűségének a relatív gyakoriságukat!

    - Számoljuk ki annak valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy tüdőrákban szenved feltéve, hogy dohányos, ill. azt feltételezve, hogy nem dohányzik!
    - Határozzuk meg a dohányzás *relatív kockázat*át, vagyis a $\frac{P(\text{tüdőrákos}\,|\,\text{dohányzik})}{P(\text{tüdőrákos}\,|\,\text{nem dohányzik})}$ hányadost!

	D	$\overline{D}$
T	483	76
$\overline{T}$	982	1412

(D: dohányos, T: tüdőrákos)

67. ÁLLÍTÁS. *Adott, pozitív valószínűségű F eseményre a $P(E|F)$ feltételes valószínűség, mint az E esemény függvénye szintén valószínűség, vagyis*

    - $P(E|F) \geq 0$ *minden E eseményre.*
    - *Páronként egymást kizáró események tetszőleges véges vagy végtelen $E_1, E_2, \ldots$ sorozatára*

    $$P(E_1 + E_2 + \ldots |F) = P(E_1|F) + P(E_2|F) + \ldots$$

    - $P(H|F) = 1$.

    KÖVETKEZMÉNY. *Ha F pozitív valószínűségű esemény, akkor*

    - *egymást kizáró E_1, E_2 eseményekre* $P(E_1 + E_2|F) = P(E_1|F) + P(E_2|F)$,
    - *$E_1 E_2$ eseményekre* $P(E_1|F) \leq P(E_2|F)$.
    - *$E_1, \ldots, E_n$ teljes eseményrendszerre* $P(E_1|F) + \ldots + P(E_n|F) = 1$,
    - *minden E eseményre* $P(E|F) = 1 - P(\overline{E}|F)$.

68. Független események

    (a) DEFINÍCIÓ. Az E *esemény bekövetkezése független az F esemény bekövetkezésétől*, ha $P(E|F) = P(E)$.

    Ha E bekövetkezése független F bekövetkezésétől, akkor $P(F) \neq 0$, valamint ebben az esetben

    $$P(E|F) = P(E) \;\Leftrightarrow\; P(EF) = P(E) \cdot P(F).$$

Hasonlóan, ha F bekövetkezése független E bekövetkezésétől, akkor $P(E) \neq 0$ és ez esetben

$$P(F|E) = P(F) \quad \Leftrightarrow \quad P(EF) = P(E) \cdot P(F).$$

Ezért vezetjük be a következő fogalmat.

DEFINÍCIÓ. Az E és F esemény *független*, ha $P(EF) = P(E) \cdot P(F)$.

ÁLLÍTÁS. *Pozitív valószínűségű E és F esemény függetlensége ekvivalens azzal, hogy E bekövetkezése független F bekövetkezésétől, valamint azzal is, hogy F bekövetkezése független E bekövetkezésétől.*

ÁLLÍTÁS. *Ha az E és F események függetlenek, akkor az E és $\overline{F}$ események is függetlenek.*

69. A kockadobásnál legyen E: 6-ost dobunk; F: páros számot dobunk. Független-e ez a két esemény?

70. Egy érmét egymás után kétszer feldobunk. Legyen E: a két dobás eredménye ugyanaz; F: először írást dobunk. Független-e a két esemény?

71. Egy alkalmassági vizsgálat adatai szerint a vizsgált személyeken 0,05 valószínűséggel mozgásszervi és 0,03 valószínűséggel érzékszervi rendellenesség figyelhető meg. Az együttes előfordulás valószínűsége 0,01.

    (a) Független-e a két rendellenesség előfordulása? Mekkora lenne az együttes előfordulás valószínűsége, ha a két rendellenesség előfordulása független volna?

    (b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott személyen egyik rendellenesség sem figyelhető meg?

    (c) Mekkora valószínűséggel találunk érzékszervi rendellenességet a mozgásszervi rendellenességgel élő egyéneknél? Fordítva, mekkora valószínűséggel található mozgásszervi rendellenesség az érzékszervi rendellenességben szenvedő egyéneknél?

72. Gyakorló feladatsor a binomiális és a hipergeometrikus eloszlás c. témakörhöz

    Oldjuk meg a feladatokat.

    (a) Egy tétel áru ötödrésze elsőosztályú. Találomra kiválasztunk 6 darabot a tételből. Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

    - a kiválasztott 6 termék közül éppen 3 elsőosztályú,
    - mind a 6 kiválasztott termék elsőosztályú,
    - van elsőosztályú a kiválasztott 6 termék között.
    - Számítsa ki a kiválasztott elsőosztályú termékek számának várható értékét, szórását.

    (b) Egy dobókockával ötször dobunk egymás után, és figyeljük a dobott hatosok számát. Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

    - az 5 dobásból kettő hatos,
    - az 5 dobásból nincs hatos,
    - az 5 dobásból legfeljebb 4 hatos.
    - Számítsa ki a dobott hatosok számának várható értékét, szórását.

    (c) A 32 lapos magyar kártyából véletlenszerűen kiválasztunk 7 darabot úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a pakliba a kihúzott lapot, és figyeljük a zöld színű lapokat. Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

    - a 7 húzásból öt zöld van
    - a 7 húzásból legalább egy zöld van
    - a 7 húzásból mind zöld
    - Számítsuk ki a kiválasztott zöld kártyák számának várható értékét és szórását.

73. Oldjuk meg a feladatokat.

    (a) Egy dobozban 10 golyó van, ezek közül 6 kék, a többi zöld. Egyszerre kiválasztunk véletlenszerűen a dobozból 5 golyót. Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

    - a kihúzott 5 golyó között 3 kék van,
    - a kihúzott 5 golyó között nincs kék,
    - a kihúzott 5 golyó között legalább 4 kék van.
    - Számítsuk ki a kihúzott kék golyók számának várható értékét és szórását.

    (b) Idén Húsvétkor összekeveredtek a tavalyi és az idei csokitojásaim. Most 30 csokitojásom van, melyből tudom, hogy 12 tavalyi, a többi idei. Kiválasztok véletlenszerűen a 30 csokitojás közül egyszerre 10-et. Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

    - a kiválasztott 10 csokitojás mindegyike tavalyról maradt,
    - a kiválasztott 10 csokitojás között 4 idei van,
    - a kiválasztott 10 csokitojásból legalább 9 tavalyról maradt.
    - Számítsuk ki a kiválasztott tavalyi csokitojások számának várható értékét és szórását.

    (c) Elmentem tavasszal a virágpiacra tulipánhagymát vásárolni. Sajnos összekeveredtek a lila és sárga virágú tulipánhagymák, de annyit tudott az eladó, hogy 30 lila és 20 sárga virágú hagyma keveredett össze. Én kiválasztottam véletlenszerűen 15 hagymát, amiket el is ültettem, és ki is hajtottak. Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

    - a 15 tulipánom mindegyike lila
    - a 15 tulipánból nyolc lila
    - legalább 14 tulipán lila
    - Adjuk meg a kihajtott lila tulipánok számának várható értékét és szórását.

74. Poisson eloszlás

    Oldjuk meg a feladatokat.

    (a) Egy nyomdai korrektúrában a tapasztalat szerint az egy oldalra jutó hibák száma Poisson-eloszlású, várható értéke 1,2. Mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott oldalon

    - pontosan 3 hibát találunk?
    - nincs hiba?
    - találunk hibát?
    - Adjuk meg a kiválasztott oldalon található hibák számának várható értékét, szórását.

    (b) Egy üzemben televíziók gyártásakor műszakonként átlagosan 5 hibás termék készül. A tapasztalatok alapján a hibás termékek műszakonkénti száma Poisson-eloszlású. Mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott műszakban

    - legfeljebb 1 készülék hibás?
    - pontosan 2 készülék hibás?
    - legalább 3 készülék hibás?
    - Adjuk meg a megfigyelt műszakban készült hibás termékek számának várható értékét, szórását.

    (c) A 8 órás munkaidőnkben véletlenszerűen kapunk üzeneteket, naponta átlagosan 16-ot. Bármely egy óra alatt az érkező üzeneteink száma Poisson-eloszlású. Mi a valószínűsége annak, hogy egy óra alatt

    - pontosan 1 üzenetet kapunk?
    - nem kapunk üzenetet?
    - kettőnél több üzenetet kapunk?
    - Adjuk meg az egy óra alatt érkező üzenetek számának várható értékét, szórását.

10. gyakorlat

75. Normális eloszlás

Oldjuk meg a feladatokat.

(a) Az angolai zsiráfok egy populációjában a felnőtt egyedek vállmagassága normális eloszlást követő valószínűségi változó. A megfigyelések alapján a zsiráfok vállmagasságának átlagos értéke 5,5 méter, szórása 0,5 méter. Mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott zsiráf vállmagassága

- több, mint 6 méter?
- kevesebb, mint 4 méter?
- 5 és 6 méter közé esik?
- A zsiráfok legnagyobb vállmagasságú 20%-ának legalább mekkora a vállmagassága?

(b) Egy üzlet napi forgalma a különböző pékárukból 70 kg várható értékű, 15 kg szórású normális eloszlást követő valószínűségi változó. Mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott napon a forgalom

- meghaladja a 65 kg-ot?
- kevesebb lesz, mint 80 kg?
- 70 és 90 kg közé esik?
- A napok legkisebb forgalmú 10%-ában legfeljebb hány kg pékárut adnak el?

(c) A 25 év feletti Opel autók motorjának tömege normális eloszlást követő valószínűségi változó. A megfigyelések alapján a motorok tömegének átlagos értéke 230 kg, szórása 20 kg. Véletlenszerűen kiválasztva egy régebbi Opelt, mennyi a valószínűsége annak, hogy motorjának tömege

- több, mint 260 kg?
- kevesebb, mint 200 kg?
- 210 és 250 kg közé esik.
- Az Opel motorok legnagyobb tömegű 25%-ának legalább mekkora a tömege?

76. Exponenciális eloszlás

Oldjuk meg a feladatokat.

(a) Tapasztalatok szerint az út hossza, amit egy bizonyos típusú robogó megtesz az első meghibásodásáig exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ez a távolság átlagosan 6000 km. Mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott robogó

- kevesebb, mint 4000 km megtétele után meghibásodik?
- több, mint 6500 km megtétele után hibásodik meg?
- 4000 km-nél több, de 6000 km-nél kevesebb út megtétele után hibásodik meg?
- Legfeljebb mekkora utat tesz meg az első meghibásodásig a robogók leghamarabb meghibásodó 20%-a?
- Adjuk meg a kiválasztott robogó első meghibásodásáig megtett út hosszának várható értékét, szórását.

(b) Egy cserjefaj egyedeinek életideje exponenciális eloszlású, átlaga 70 év. Mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott cserje

- kevesebb, mint 50 évig él?
- több, mint 100 évig él?
- 65 évnél több, de 75 évnél kevesebb ideig él?
- Legalább hány évet él a cserjék legtovább élő 15%-a?
- Adjuk meg a kiválasztott cserje életidejének várható értékét, szórását.

(c) Egy szemészet várójába egymás után érkező betegek érkezése közt eltelt idő exponenciális eloszlást követő valószínűségi változó. $\frac{1}{2}$ a valószínűsége annak, hogy egy órán belül újabb beteg érkezik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

- 30 percen belül érkezik újabb beteg?
- a várható érték kétszeresénél több idő telik el újabb beteg érkezéséig?
- legalább 30 percet, de legfeljebb 90 percet kell várni újabb betegre?
- Legfeljebb hány percet kell várni újabb betegre a legrövidebb várakozások 25%-ában?
- Adjuk meg az újonnan érkező beteg érkezéséig eltelt idő várható értékét, szórását.

77. Egyenletes eloszlás

    Oldjuk meg a feladatokat.

    (a) Tudjuk, hogy a buszunk 10:00 és 11:00 közötti egyenletes időben érkezik a megállóba, ezért 10:00-ra a megállóba megyünk.
    - Mi a valószínűsége, hogy legalább 10 percet kell a buszra várnunk?
    - Ha 10:20-kor még mindig várjuk a buszt, mi a valószínűsége, hogy még legalább 10 percet fogunk a buszra várni?

    (b) Mi a valószínűsége, hogy éjszaka álmomból felriadva a nagymutató az óralap képzeletbeli függőleges középvonalához képest jobbra van? Es annak a valószínűsége, hogy a körív 5-ös ´ és 6-os számjegy közötti részén van?

    (c) Mr James Bond a titkos találkára várhatóan délután 5-kor érkezik, de lehet, hogy korábban vagy később. Azt is tudjuk, hogy 25 % az esély arra, hogy 18 óra 15 perc után érkezik. Adjuk meg érkezésének lehetséges legkorábbi és legkésőbbi időpontját, feltéve, hogy érkezésének időpontja egyenletes eloszlást követ (minden időpont egyformán valószínű).